

Ulrich Krengel

# **Einführung in die Wahrscheinlichkeits- theorie und Statistik**

8., erweiterte Auflage



# Inhaltsverzeichnis

<i>Kapitel I</i>	<b>Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume</b>	<b>1</b>
§ 1	Modelle für Zufallsexperimente, Abzählmethoden . . . . .	1
1.1	Endliche Wahrscheinlichkeitsräume . . . . .	2
1.2	Einfache Urnenmodelle . . . . .	6
1.3	Anwendungsbeispiele . . . . .	10
1.4	Die hypergeometrische Verteilung . . . . .	12
1.5	Vereinigungen von Ereignissen . . . . .	12
1.6	Multinomialkoeffizienten . . . . .	14
1.7	Runs* . . . . .	14
1.8	Einfache Identitäten für Binomialkoeffizienten . . . . .	15
	Anhang* . . . . .	17
	Aufgaben . . . . .	19
§ 2	Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit . . . . .	21
2.1	Definition und Eigenschaften bedingter Wahrscheinlichkeiten . . . . .	21
2.2	Unabhängigkeit . . . . .	25
2.3	Produktexperimente . . . . .	27
2.4	Einige Verteilungen für Produktexperimente . . . . .	29
2.5	Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume . . . . .	31
2.6	Konstruktion von Wahrscheinlichkeitsräumen aus bedingten Wahrscheinlichkeiten . . . . .	32
2.7	Austauschbare Verteilungen* . . . . .	34
2.8	Genetische Modelle* . . . . .	35
2.9	Bedingte Wahrscheinlichkeit und Scheinkorrelation* . . . . .	37
	Anmerkungen* . . . . .	39
	Aufgaben . . . . .	40
§ 3	Zufallsvariable, Erwartungswert, Varianz . . . . .	42
3.1	Verteilungen von Zufallsvariablen . . . . .	42
3.2	Unabhängigkeit . . . . .	45
3.3	Erwartungswerte . . . . .	46
3.4	Das Rechnen mit Indikatorfunktionen . . . . .	49
3.5	Varianz und Kovarianz . . . . .	52
3.6	Das schwache Gesetz der großen Zahlen . . . . .	56
	Aufgaben . . . . .	58
§ 4	Grundbegriffe der Schätztheorie . . . . .	60
4.1	Der allgemeine Rahmen von Schätzproblemen . . . . .	61
4.2	Maximum-Likelihood-Schätzer . . . . .	62
4.3	Erwartungstreue . . . . .	63
4.4	Der mittlere quadratische Fehler . . . . .	65

4.5	Die Informationsungleichung*	66
4.6	Konsistenz*	68
4.7	Konfidenzintervalle	69
	Aufgaben	74
§ 5	Approximationen der Binomialverteilung	76
5.1	Approximation von $n!$ und $b_{n,p}(k)$	76
5.2	Der Satz von de Moivre-Laplace	80
5.3	Anwendungen	83
5.4	Die Poisson-Approximation	85
	Anhang	89
	Aufgaben	90
§ 6	Tests	92
6.1	Beispiel der „tea tasting Lady“	92
6.2	Grundbegriffe der Testtheorie	94
6.3	Mehr zur „tea tasting Lady“	95
6.4	Ein verfeinertes Modell für den Tee-Test*	97
6.5	Beispiel des Testens der Existenz von außersinnlicher Wahrnehmung*	99
6.6	Eine Erweiterung des Testbegriffs: Randomisierte Tests	100
6.7	Tests einfacher Hypothesen gegen einfache Alternativen	101
6.8	Anwendung auf zusammengesetzte Alternativen	103
6.9	Allgemeine Hinweise zur Testtheorie	103
6.10	$p$ -Werte*	104
	Aufgaben	105
§ 7	Erzeugende Funktionen*	107
	Verzweigungsprozesse	111
	Aufgaben	113
§ 8	Entropie und Codierung*	114
8.1	Der Quellen-Codierungssatz	114
8.2	Anwendung auf mehrstufige Zufallsexperimente	117
	Aufgaben	118
§ 9	Laufzeitanalysen von rekursiven Algorithmen*	120
	Aufgaben	126
<b>Kapitel II Allgemeine Modelle</b>		<b>127</b>
§ 10	Wahrscheinlichkeitsmaße mit Dichten	127
10.1	$\sigma$ -Algebren und allgemeine Wahrscheinlichkeitsmaße	127
10.2	Beispiele von Verteilungen mit Dichten	130
	Anhang*	135
	Aufgaben	137

§ 11	Zufallsvariable und ihre Momente . . . . .	139
11.1	Messbare Funktionen . . . . .	139
11.2	Verteilungen von Zufallsvariablen . . . . .	141
11.3	Unabhängigkeit . . . . .	142
11.4	Erwartungswerte . . . . .	144
11.5	Mehrdimensionale Dichtetransformation und Normalverteilung* . . . . .	146
	Aufgaben . . . . .	150
§ 12	Grenzwertsätze* . . . . .	152
12.1	Das starke Gesetz der großen Zahlen . . . . .	152
12.2	Normale Zahlen* . . . . .	156
12.3	Der Zentrale Grenzwertsatz . . . . .	157
	Anhang . . . . .	161
	Aufgaben . . . . .	162
§ 13	Schätzverfahren und Fehlerrechnung . . . . .	163
13.1	Maximum-Likelihood-Schätzungen bei Dichten . . . . .	163
13.2	Konfidenzintervalle . . . . .	165
13.3	Das Fehlerfortpflanzungsgesetz* . . . . .	166
13.4	Die Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	167
13.5	Median, Ausreißer und Robuste Schätzer* . . . . .	169
	Anhang* . . . . .	171
	Aufgaben . . . . .	173
§ 14	Einige wichtige Testverfahren . . . . .	174
14.1	Der $t$ -Test . . . . .	174
14.2	Einfache Varianzanalyse* . . . . .	179
14.3	$\chi^2$ -Tests . . . . .	181
14.4	Nichtparametrische Tests . . . . .	186
	Anhang . . . . .	191
	Aufgaben . . . . .	193
<b>Kapitel III Markowsche Ketten</b>		<b>194</b>
§ 15	Die markowsche Eigenschaft . . . . .	194
15.1	Definition und Beispiele . . . . .	194
15.2	Einfache Folgerungen aus der markowschen Eigenschaft . . . . .	196
15.3	Stationäre Übergangswahrscheinlichkeiten . . . . .	197
15.4	Absorptionswahrscheinlichkeiten . . . . .	199
15.5	Absorptionsverteilungen* . . . . .	200
	Aufgaben . . . . .	202
§ 16	Das Verhalten markowscher Ketten in langen Zeiträumen . . . . .	204
16.1	Ketten mit endlich vielen Zuständen . . . . .	204
16.2	Kommunizierende Zustände und Periodizität . . . . .	207

16.3	Rekurrenz und Transienz . . . . .	209
	Anhang . . . . .	214
	Aufgaben . . . . .	215
§ 17	Der Erneuerungssatz . . . . .	217
17.1	Die Erneuerungsgleichung . . . . .	217
17.2	Anwendung auf Übergangswahrscheinlichkeiten . . . . .	220
17.3	Bestimmung der $m_{ii}$ . . . . .	222
	Aufgaben . . . . .	225
§ 18	Der Poisson-Prozess . . . . .	226
18.1	Charakterisierung des Poisson-Prozesses . . . . .	226
18.2	Sprungzeiten beim Poisson-Prozess* . . . . .	229
	Aufgaben . . . . .	231
	<b>Hinweise zum Weiterlesen</b>	<b>233</b>
	<b>Lösungen der mit (L) gekennzeichneten Aufgaben</b>	<b>235</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>242</b>
	<b>Tabellen</b>	<b>246</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>251</b>
	<b>Namen- und Sachwortverzeichnis</b>	<b>252</b>